Le problème est composé de quatre questions qui présentent quatre méthodes d'efficacité croissante pour rechercher dans un vecteur donné le sous vecteur contigu ayant la plus grande somme, ainsi que les complexités correspondantes.

Le problème :

- On dispose d'un vecteur $\vec{V}$ composé de n nombres entiers relatifs. (n est la longueur du vecteur).
- On note $\vec{V} = [x_1, \ldots, x_n]$ où $\forall i \in \mathbb{N}$, $x_i \in \mathbb{Z}$.
- On dit que $\vec{V}'$ est un sous-vecteur contigu de $\vec{V}$ s'il existe un couple d'entiers (g,d), tel que $\vec{V}' = [x_g, \ldots, x_d]$ et $1 \le g \le d \le n$. g est appelé indice de début et d indice de fin.
- On désire déterminer le sous-vecteur $\vec{V}' = [x_g, \ldots, x_d]$ tel que $\sum_{i=g}^{d} x_i$ soit la plus grande somme de tous les sous-vecteurs contigus de $\vec{V}$.
- On note : $indice_MAX(\vec{V}) = (g,d)$ un tel couple,

$$MAX(\vec{V}) = \sum_{i=g}^{d} x_i .$$

1.

On note boucle POUR un schéma de type :

POUR k DE i à
    Début
    Faire
    : $S := S + x[k]$
    Fin
$k = j$

Si on donne la valeur 0 comme valeur initiale à S, ce qui précède décrit le calcul de la sommation $\sum_{k=i}^{j} x_k$.

Soit m une variable initialisée à 0, à partir de trois boucles POUR, calculer pour i variant de 1 à n la somme $S = \sum_{i=g}^{d} x_i$ ainsi que les indices (g,d) pour lesquels S soit maximale.

Décrire une méthode de détermination du couple (g,d).

On peut, pour répondre à la question écrire une procédure que l'on note *MaxSomme1* :
- soit à l'aide du schéma POUR,
- soit en turbo pascal
- soit en Maple.

Démontrer que le nombre total de sous vecteurs contigus, que l'on note EQ, est $\frac{n(n+1)}{2}$.

On note $c_1(n)$ le nombre d'additions effectuées par la procédure ($c_1(n)$ représente la complexité). Démontrer que $c_1(n) = O(n^3)$.

2.

Quel est le nombre de fois où, pour (i,j) fixé $S = \sum_{k=i}^{j} x_k$ est calculé dans *MaxSomme1* ?

Tout en exploitant la totalité des sous-vecteurs, il est possible de supprimer la boucle intérieure. Indiquer les modifications dans *MaxSomme2* et la complexité $c_2(n) = O(n^2)$.

On présentera les résultats de manière identique à la première question.

3. Une méthode récursive : diviser pour résoudre.

Soit $\vec{V}$ un vecteur de longueur n.

Soit $\vec{V}'$ un sous vecteur de $\vec{V}$. g et d les indices de début et fin.

On note m le milieu de (g,d), m est le quotient de la division euclidienne par 2 de $g+d$.

Montrer que $g \le m \le d$.

On note $\vec{M}_a = [x_{g'},\ldots,x_m]$ le sous-vecteur de $\vec{V}'$ de début g' de somme maximale pour tous les sous-vecteurs contigus de fin m.

On note $\vec{M}_b = [x_m,\ldots,x_{d'}]$ le sous-vecteur de $\vec{V}'$de fin d' et de somme maximale pour tous les sous-vecteurs contigus de début m.

On note $\vec{M}_c = [x_{g'},\ldots,x_{d'}]$.

Dans le cas où $indice_MAX(\vec{V}') = (g',d')$ et $g' \le m \le d'$, montrer que $\vec{M}_c$ est une sous-chaine maximale pour $\vec{V}'$.

Dans le cas contraire que pensez-vous de $indice_MAX([x_g,\ldots,x_m])$ et $indice_MAX([x_m,\ldots,x_d])$

Décrire le principe d'une procédure récursive.

Paramètres : $\vec{V}$: vecteur; *début*, *fin*: entier; *m*: variable entière

milieu = partie entière$\left(\frac{début + fin}{2}\right)$

Début

⋮ Calcul de $MAX(\vec{M}_a) = m_g$

⋮ Calcul de $MAX(\vec{M}_b) = m_d$

⋮ 2 appels récursifs de la procédure

Calcul du Max

Fin

Indiquer pourquoi $c_3(n)$ vérifie $c_3(n) = O(n) + 2c_3\left(\frac{n}{2}\right)$.

En déduire que $c_3(n) = O(n.\ln n)$.

4. La méthode de récurrence

Soit $\vec{V} = [x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}]$ un vecteur donné de longueur $n+1$. On note $\vec{V}' = [x_1,\ldots,x_n]$.

Supposons avoir déjà calculé pour $\vec{V}'$ les données suivantes :

un couple (g,d) tel que :

i) $S = \sum_{i=g}^{d} x_i$ soit maximale pour $\vec{V}'$,

ii) $x_g > \sum_{i=l}^{m} x_i$ avec $1 \le l \le m < g$

iii) on note $S_1 = \sum_{i=g}^{n} x_i$.

Si on note $somme = s + x_{n+1}$:

Donner $indice_MAX(\vec{V})$ dans les cas suivants:

a. Si $somme > S_1$

b. Si $x_{n+1} > S_1$

c. Lorsque les deux premiers cas sont faux

En déduire une méthode de calcul de complexité $c_4(n) = O(n)$.